## 7.3.1 Parametrické vyjádření přímky I

**Předpoklady:** 070205, 070208

**Pedagogická poznámka:** Hodina není příliš nabitá. Jde o první setkání studentů s rovnicí útvaru a dosazováním bodů do ní, proto je velmi málo pravděpodobné, že by studentům nestačila.

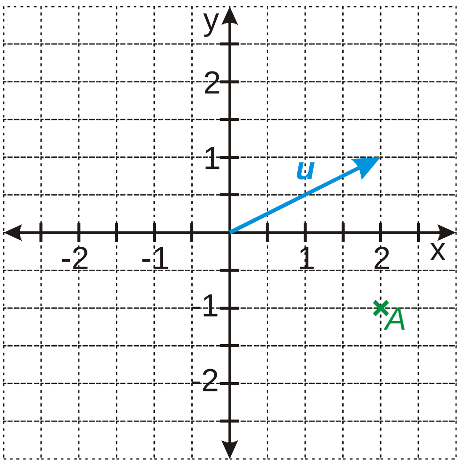
**Pedagogická poznámka:** Během hodiny je třeba žákům připomenout, aby si zopakovali vlastnosti významných úseček a přímek v trojúhelníku (výška, těžnice, osa strany, střední příčka).

Cíl analytické geometrie: přeměnit rýsování na počítání, místo nakreslených útvarů čísla a rovnice.
Co už umíme:

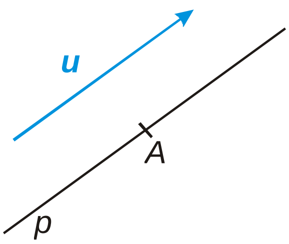
- bod nezobrazujeme křížkem na papíře, ale souřadnicemi $A[a_1;a_2]$,
- vektor nezobrazujeme šipkou, ale souřadnicemi $\boldsymbol{u}=(u_1;u_2)$.

Jak popíšeme přímku, abychom výpočtem zjistili, zda na ní leží nebo neleží například bod $B[b_1;b_2]$?

**Př. 1:** Zakresli do soustavy souřadnic bod $A[2;-1]$ a vektor $\boldsymbol{u}=(2;1)$.



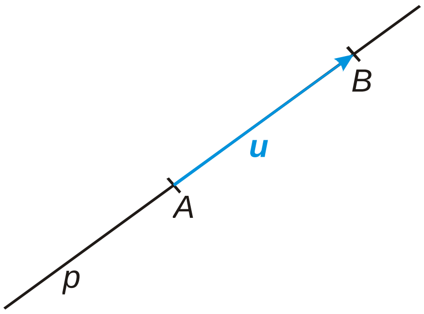

Jedna z možností zadání přímky: bod a směr.



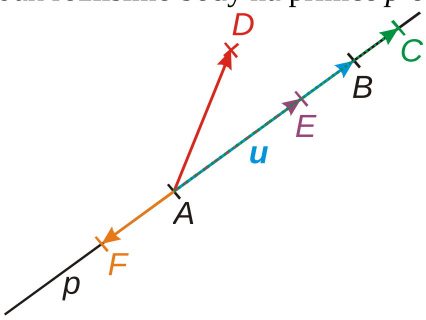

Jak bod *A* a směr $\boldsymbol{u}$ určují přímku *p*? Například takto:

- bod *A* nám říká, odkud začínáme kreslit,
- vektor $\boldsymbol{u}$ nám říká, jakým směrem se z bodu *A* máme vydat.

Pokud vektor $\boldsymbol{u}$ určuje směr přímky *p*, nazveme ho **směrový vektor přímky *p***.




Bod $A$ a vektor $\boldsymbol{u}$ určují přímku $\Rightarrow$ měly by stačit k popisu všech bodů přímky.
Jak rozlišíme body na přímce $p$ od bodů mimo ni?




Ke všem bodům z roviny se z bodu $A$ dostaneme posunutím o vektor.

- Pokud bod leží na přímce $p$, posouváme se o vektor, který je násobkem vektoru $\boldsymbol{u}$.
- Pokud neleží na přímce $p$, posouváme se o vektor, který není násobkem vektoru $\boldsymbol{u}$.

$\Rightarrow$ Bod $X$ leží na přímce $p$, právě když splňuje rovnici $X = A + t\boldsymbol{u}$, kde $t \in R$ (do libovolného bodu přímky $p$ se dostaneme z bodu $A$ posunutím o násobek směrového vektoru $\boldsymbol{u}$).

Rovnice $X = A + t\boldsymbol{u}, t \in R$ se nazývá **parametrická rovnice přímky** (nebo také **parametrické vyjádření přímky**) určené bodem $A$ a směrovým vektorem $\boldsymbol{u}$.
Proměnná $t$ se nazývá **parametr**.

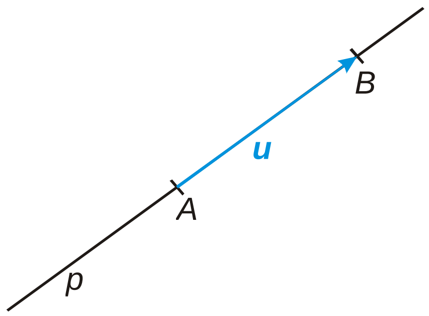
Jde fakticky o dvě rovnice, protože bod v rovině má dvě souřadnice. Konkrétně pro body $X[x;y]$, $A[a_1;a_2]$ a směrový vektor $\boldsymbol{u} = (u_1;u_2)$ získáme z rovnice $X = A + t\boldsymbol{u}, t \in R$ soustavu rovnic:
$$x = a_1 + tu_1$$
$$y = a_2 + tu_2, t \in R$$

**Př. 2:** Napiš parametrické vyjádření přímky $p$, která je dána bodem $A[2;3]$ a směrovým vektorem $\boldsymbol{u} = (2;-1)$.

Přímku můžeme zapsat rovnicí: $X = [2;3] + t(2;-1)$, která odpovídá soustavě rovnic:
$$x = 2 + 2t$$
$$y = 3 - t,\ t \in R.$$
Dodatek $t \in R$ je nutný, jinak by nešlo o rovnici přímky.

**Dodatek:** Často se přímka zapisuje také jako množina bodů: $p = \{[2+2t;3-t], t \in R\}$.

**Př. 3:** Napiš parametrické vyjádření přímky $AB$, $A[-1;0]$, $B[2;-2]$.




Potřebujeme získat směrový vektor přímky, takovým vektorem je například vektor $\boldsymbol{AB} = B - A = (3;-2) = \boldsymbol{u}$.

Přímku $AB$ můžeme zapsat rovnicí: $X = [-1;0] + t(3;-2)$, která odpovídá soustavě rovnic:

$$\begin{aligned} x &= -1 + 3t \\ y &= 0 - 2t,\ t \in R \end{aligned}.$$

**Př. 4:** Najdi parametrické vyjádření přímky $q$ dané body $C[2;3]$ a $D[-1;-3]$. Rozhodni zda na přímce leží body $E[1;1]$ a $F[-3;-6]$. Urči druhou souřadnici bodu $G[3;y]$ tak, aby ležel na přímce $q$.

Určíme směrový vektor: $\boldsymbol{u} = D - C = (-3;-6)$.

Parametrické vyjádření přímky $q$: $\begin{aligned} x &= 2 - 3t \\ y &= 3 - 6t, t \in R \end{aligned}$.

**Bod *E*** leží na přímce $q$, právě když vyhovuje rovnicím $\Rightarrow$ dosadíme ho do rovnic místo neznámých $x$, $y$:

$$\begin{aligned} 1 &= 2 - 3t \\ 1 &= 3 - 6t \end{aligned}$$

Vypočteme z obou rovnic parametr $t$.

$1 = 2 - 3t$ | $1 = 3 - 6t$

$-1 = -3t \Rightarrow t = \frac{1}{3}$ | $-2 = -6t \Rightarrow t = \frac{1}{3}$

Z obou rovnic vyšla stejná hodnota parametru $t$ $\Rightarrow$ bod $E$ vyhovuje parametrickému vyjádření přímky $q$ $\Rightarrow$ bod $E$ leží na přímce $q$.

Teď **bod *F***: $\begin{aligned} -3 &= 2 - 3t \\ -6 &= 3 - 6t \end{aligned}$.

Vypočteme z obou rovnic parametr $t$.

$-3 = 2 - 3t$ | $-6 = 3 - 6t$

$-5 = -3t \Rightarrow t = \frac{5}{3}$ | $-9 = -6t \Rightarrow t = \frac{3}{2}$

Z obou rovnic vyšly různé hodnoty parametru $t$ $\Rightarrow$ bod $F$ nevyhovuje parametrickému vyjádření přímky $q$ $\Rightarrow$ bod $F$ neleží na přímce $q$.

Dosadíme **bod *G***: $\begin{aligned} 3 &= 2 - 3t \\ y &= 3 - 6t \end{aligned}$.

Soustava dvou rovnic o dvou neznámých. Z první vypočteme $t$ a dosadíme do druhé.

$3 = 2 - 3t$

$1 = -3t \Rightarrow t = -\frac{1}{3}$ | $y = 3 - 6t = 3 - 6\left(-\frac{1}{3}\right) = 5$

Bod $G$ má souřadnice $G[3;5]$.

**Pedagogická poznámka:** U předchozího příkladu je nejdůležitější, aby studenti dobře pochopili dosazování bodů do rovnice. Je to první příklad, který se bude mnohokrát opakovat. Když je to necháte udělat samostatně, možná budete překvapeni, co jsou schopni vyrobit.

**Př. 5:** Najdi parametrické vyjádření přímky *r*, která je kolmá na přímku *q* z předchozího příkladu a prochází bodem $H[-1;2]$.

Do parametrického vyjádření potřebujeme směrový vektor přímky *r*, musí být kolmý na vektor $\boldsymbol{u} = D - C = (-3;-6)$.

Vektor ***v*** kolmý na vektor ***u*** má například souřadnice $\boldsymbol{v} = (6;-3)$ $\Rightarrow$

parametrické vyjádření kolmice: $r: X = [-1;2] + t(6;-3), t \in R$,

soustavou rovnic: $\begin{array}{l} x = -1 + 6t \\ y = 2 - 3t, t \in R \end{array}$.

**Pedagogická poznámka:** Tady opět narazíte na problémy s pamětí, i když je postup na výrobu kolmých vektorů založený na skalárním součinu v modrém rámečku.

**Př. 6:** Jsou dány body $A[1;2]$, $B[4;-2]$ a $C[3;-2]$. Najdi přímku *p*, která prochází bodem *C* a je rovnoběžná s přímkou *AB*. Leží na přímce *p* bod $D[-3;6]$?

Na parametrické vyjádření přímky potřebujeme:

- bod: máme bod $C[3;-2]$,
- směrový vektor: musí být rovnoběžný se směrovým vektorem přímky *AB* $\Rightarrow$ můžeme použít přímo vektor $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{AB} = B - A = (3;-4)$.

$\Rightarrow$ Parametrické vyjádření přímky *p*: $\begin{array}{l} x = 3 + 3t \\ y = -2 - 4t, t \in R \end{array}$ nebo $p = \{[3+3t; -2-4t], t \in R\}$.

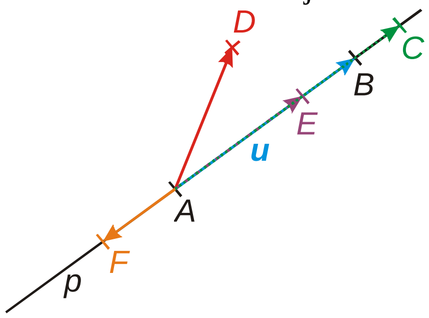
Dosadíme **bod** $D[-3;6]$: $\begin{array}{r} -3 = 3 + 3t \\ 6 = -2 - 4t \end{array}$.

Vypočteme z obou rovnic parametr *t*.

| | |
|---|---|
| $-3 = 3 + 3t$ | $6 = -2 - 4t$ |
| $-6 = 3t \Rightarrow t = -2$ | $8 = -4t \Rightarrow t = -2$ |

$\Rightarrow$ Bod *D* leží na přímce *p*.

**Př. 7:** Rozhodni s pomocí obrázku, zda je parametrické vyjádření přímky $p$ pomocí bodu $A$ a směrového vektoru $\boldsymbol{u}$ jednoznačné.




Parametrické vyjádření přímky není jednoznačné. Místo bodu $A$ můžeme použít libovolný jiný bod přímky a místo směrového vektoru $\boldsymbol{u}$ jeho libovolný násobek.

Nejednoznačnost parametrického vyjádření je jeho velkou nevýhodou. Mnohdy je poměrně zdlouhavé rozhodování, zda dvě parametrická vyjádření nepředstavují stejnou přímku.

**Př. 8:** Najdi parametrické vyjádření osy $x$.

Na parametrické vyjádření přímky potřebujeme:

- bod: počátek soustavy souřadnic bod $C[0;0]$,
- směrový vektor: musí být rovnoběžný s osou $x \Rightarrow \boldsymbol{u} = \boldsymbol{e}_x = (1;0)$.

$\Rightarrow$ Parametrické vyjádření osy $x$: $\begin{array}{l} x = t \\ y = 0, t \in R \end{array}$ (logické, body na ose $x$ mají $y$-vou souřadnici nulovou).

**Dodatek:** Parametrické vyjádření osy $x$: $\begin{array}{l} x = t \\ y = 0, t \in R \end{array}$, přesně odpovídá podmínkám pro souřadnice bodů, které na ose leží: $y$-ová souřadnice musí být nulová (rovnice $y = 0$), $x$-ová souřadnice může být libovolná (rovnice $x = t; t \in R$).

**Pedagogická poznámka:** Vyjádření osy $x$ obsahuje hodně nul a to (zejména u směrového vektoru) činí žákům značné problémy. Některým pomůže, když si na ose $x$ zvolí dva konkrétní body.

**Př. 9:** Petáková:
strana 105/cvičení 1 a) c) d) e) (pouze parametrické rovnice)

**Shrnutí:** Ke všem bodům přímky se dostaneme z libovolného jejího bodu posunutím o násobek směrového vektoru.